ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ К ЗАДАЧАМ 2013 ГОДА

Задача 1.

Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 2. Один из его корней равен 5/2. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 3$. **Ответ:** 3/5

Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен 3. Один из его корней равен 4/3. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = -2$. **Ответ:** $-1/2$

Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен -2. Один из его корней равен 3/2. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 1$. **Ответ:** $-1/3$

Старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$ равен -3. Один из его корней равен 7/3. Найдите второй корень, если известно, что $f(0) = 4$. **Ответ:** $-4/7$

Задача 2.

Вычислите $\log_{12} 3 \cdot \log_9 12$. **Ответ:** 1/2

Вычислите $\log_8 10 \cdot \log_{10} 4$. **Ответ:** 2/3

Вычислите $\log_5 27 \cdot \log_9 5$. **Ответ:** 3/2

Вычислите $\log_{16} 6 \cdot \log_6 8$. **Ответ:** 3/4

Задача 3.

Решите неравенство $9\left(1+5^{1-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(5^{2x}+5\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}$. **Ответ:** $0 \leqslant x \leqslant 1$

Решите неравенство $15\left(4+4^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(4^{1+2x}+1\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 20^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{x}{2}}$. **Ответ:** $-1 \leqslant x \leqslant 0$

Решите неравенство $\frac{9}{2}\left(1+2^{1-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(2^{2x}+2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}}$. **Ответ:** $0 \leqslant x \leqslant 1$

Решите неравенство $12\left(3+3^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(3^{1+2x}+1\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 4 \cdot 3^{\frac{x}{2}}$. **Ответ:** $-1 \leqslant x \leqslant 0$

Задача 4.

Решите уравнение $\dfrac{\sin 5x}{\sin x} - \dfrac{\cos 5x}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{\sin 5x} - \dfrac{\cos x}{\cos 5x}$. **Ответ:** $x = \dfrac{k\pi}{8}, \dfrac{n\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash 4\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}\backslash 3\mathbb{Z}$

Решите уравнение $\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x} + \dfrac{\sin 3x}{\cos 2x} = \dfrac{\sin 2x}{\cos 3x} + \dfrac{\cos 2x}{\sin 3x}$. **Ответ:** $x = \dfrac{k\pi}{10}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash(2\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z})$

Решите уравнение $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}+\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=\dfrac{\sin x}{\sin 3x}+\dfrac{\cos x}{\cos 3x}$. **Ответ:** $x=\dfrac{k\pi}{8},\quad k\in\mathbb{Z}\backslash 4\mathbb{Z}$

Решите уравнение $\dfrac{\cos 4x}{\sin 3x}-\dfrac{\sin 4x}{\cos 3x}=\dfrac{\sin 3x}{\cos 4x}-\dfrac{\cos 3x}{\sin 4x}$. **Ответ:** $x=\dfrac{k\pi}{14},\quad k\in\mathbb{Z}\backslash 7\mathbb{Z}$

Задача 5.

В 14:00 из села Верхнее вниз по течению реки в сторону села Нижнее отправился катер "Быстрый". Когда до Нижнего оставалось плыть 500 метров, ему навстречу из Нижнего вышел катер "Смелый". В этот же самый момент "Быстрый", не желая встречи со "Смелым", развернулся и пошел обратно к Верхнему. В 14:14, когда расстояние по реке от "Быстрого" до Верхнего сравнялось с расстоянием по реке от "Смелого" до "Быстрого", на "Смелом" осознали, что они идут с "Быстрым" на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно к Нижнему. В исходные пункты катера вернулись одновременно в 14:18. Найдите расстояние по реке между Верхним и Нижним, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью. **Ответ:** 2 км

От биостанции до границы заповедника вверх по реке ровно 14 км. В 7:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. Через некоторое время им навстречу с биостанции вышел катер рыбинспекции. Браконьеры тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. В 7:38, когда браконьеры оказались ровно посередине между рыбинспекторами и границей, рыбинспекторы осознали, что они идут с браконьерами на одинаковой скорости, развернулись и направились обратно на биостанцию. До биостанции они добрались ровно в тот момент, когда браконьеры выехали за пределы заповедника — в 7:50. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры и рыбинспекторы, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью. **Ответ:** 4 км

В 15:00 из пункта А, двигаясь против течения реки в сторону пункта Б, вышел катер "Первый", а навстречу ему из пункта Б отправился катер "Второй". В 15:12 путь, пройденный "Вторым", стал равен расстоянию между катерами. В этот момент "Первый" развернулся и пошел обратно к пункту А. "Второй" продолжал двигаться за "Первым" до тех пор, пока "Первый" не прибыл в пункт А. В этот момент расстояние от "Второго" до А равнялось 1,6 км. Развернувшись, "Второй" сразу же отправился обратно в пункт Б, куда и прибыл в 15:49. Чему равно расстояние по реке между пунктами А и Б? **Ответ:** 4,4 км

От биостанции до границы заповедника вниз по реке ровно 8 км. В 8:00 браконьеры вошли на катере в заповедник и направились в сторону биостанции. В это же время им навстречу с биостанции вышел катер с рыбинспекторами. Через 6 минут, когда рыбинспекторы были ровно посередине между биостанцией и браконьерами, браконьеры заметили катер рыбинспекции, тут же развернулись и направились обратно к границе заповедника. Когда браконьеры достигли границы, рыбинспекторы с чувством выполненного долга развернулись и отправились обратно на биостанцию, куда прибыли в 08:25. Найдите наименьшее расстояние, на котором находились браконьеры от рыбинспекторов, если известно, что оба катера движутся равномерно и с одинаковой собственной скоростью. **Ответ:** 3 км

Задача 6.

Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r. Найдите r, если $R = 12$, а косинус угла между диагональю AC и основанием AD равен 3/4.

Ответ: 7

Трапеция $ABCD$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r, причем $R = 2r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ AC равна 4.

Ответ: $\sqrt{17} - 1$

Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r. Найдите r, если $R = 20$, а косинус угла между диагональю KM и основанием KN равен 4/5.

Ответ: 9

Трапеция $KLMN$ вписана в окружность радиуса R и описана около окружности радиуса r, причем $R = \frac{3}{2}r$. Найдите среднюю линию трапеции, если диагональ KM равна 3.

Ответ: $\sqrt{10} - 1$

Задача 7.

В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'B'$ верхнего основания (параллельном AB) отмечена точка D, так что $A'D : DB' = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABC'D$, если высота призмы равна 1.

Ответ: $\left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$

В основании прямой призмы $ABCA'B'C'$ лежит прямоугольный треугольник ABC, такой что $AC = BC = 1$. На ребре $A'C'$ верхнего основания (параллельном AC) отмечена точка D, так что $A'D : DC' = 2 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $AB'CD$, если высота призмы равна 1.

Ответ: $\left(1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{11}}{3} + \frac{\sqrt{14}}{3}\right)^{-1}$

В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM, такой что $KM = LM = 1$. На ребре $K'L'$ верхнего основания (параллельном KL) отмечена точка N, так что $K'N : NL' = 1 : 3$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KLM'N$, если высота призмы равна 1.

Ответ: $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{11}}{4} + \frac{\sqrt{19}}{4}\right)^{-1}$

В основании прямой призмы $KLMK'L'M'$ лежит прямоугольный треугольник KLM, такой что $KM = LM = 1$. На ребре $K'M'$ верхнего основания (параллельном KM) отмечена точка N, так что $K'N : NM' = 3 : 1$. Найдите радиус сферы, вписанной в тетраэдр $KL'MN$, если высота призмы равна 1.

Ответ: $\left(1 + \frac{7+\sqrt{13}}{2\sqrt{2}}\right)^{-1}$

Задача 8.

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin\left(x + \dfrac{a}{x}\right) = x + 1$ имеет бесконечно много решений.

Ответ: $a \neq 0$

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin\left(x - a\ln|x|\right) = x + 1$ имеет бесконечно много решений.

Ответ: $a \neq 0$

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\cos\left(x - \frac{a}{x}\right) = x - 1$ имеет бесконечно много решений.

Ответ: $a \neq 0$

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\cos\left(x + a\ln|x|\right) = x - 1$ имеет бесконечно много решений.

Ответ: $a \neq 0$